CONCOURS D'ADMISSION 2019

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
Formations françaises à l'étranger

FUI-FF_ Session 2_Printemps

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Dimanche 10 mars 2019 de 9 h à 12 h

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Thème de l'épreuve :

Ce sujet aborde la notion de **modes propres** dans deux domaines de la physique :
- modes propres dans des cavités résonnantes couplées en électrocinétique,
- oscillations libres d'une corde vibrante fixée à ses extrémités.

Formulaire :

- dérivée partielle : on considère une fonction de plusieurs variables $f(x,y)$ et on rappelle que la **dérivée partielle,** par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, de cette fonction est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, ici x, les autres étant gardées constantes.

  Exemple : $f(x,y) = x^2\cos(3y) \longrightarrow \partial f/\partial x = 2x\cos(3y)$ et $\partial f/\partial y = -3x^2\sin(3y)$.

- différentielle et dérivées partielles : $df(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)dz$

- gradient d'une fonction, en coordonnées cartésiennes :

  $$\vec{\mathrm{grad}}\left(f(x,y,z)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e}_z$$

- Dans l'ensemble du sujet i est le nombre complexe tel que $i^2 = 1$.

- $\sin^2(\theta) = \left(1 - \cos(2\theta)\right)/2$

- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Aide au calcul :

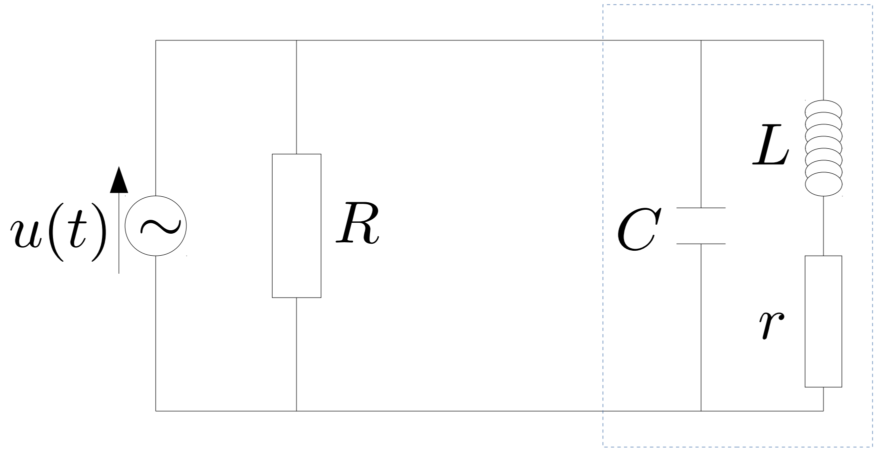
- $\sqrt{3} \sim 1,73$

- $\sqrt{10} \sim 3,16$

- $\pi \sim 3,14$

Exercice : modélisation électrocinétique d'une cavité résonnante

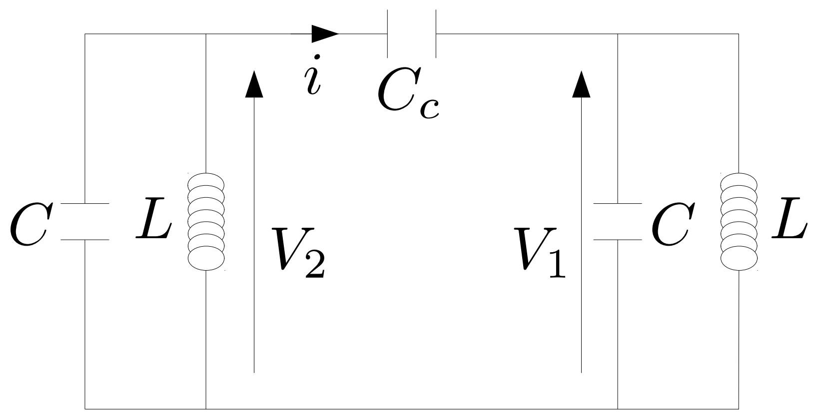
Pour accélérer des particules à des énergies suffisamment élevées on utilise des cavités accélératrices que l'on peut modéliser, dans le domaine des radio-fréquences par un circuit électrique assez simple, reproduit ci-dessous, dans lequel le signal d'entrée est généré sous forme sinusoïdal, à une pulsation ω.



1. Calculer l'impédance complexe notée $\underline{Z}$ du dipôle encadré sur la Figure précédente en fonction de r, L et de la variable $x = \omega/\omega_0$ où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ correspond à la fréquence propre de la cavité résonnante idéale associée.

2. On définit le facteur de qualité comme $Q = \omega_0 \dfrac{U}{\mathcal{P}}$ où U est l'énergie stockée dans la cavité lorsque $\omega = \omega_0$ et $\mathcal{P}$ la puissance moyenne dissipée dans r. Exprimer Q en fonction de L, ω_0 et r.

3. Pour augmenter l'efficacité du système on couple des cavités résonnantes, comme sur l'exemple donné ci-dessous :



Établir que le système d'équations différentielles reliant V_1 et V_2 s'écrit :

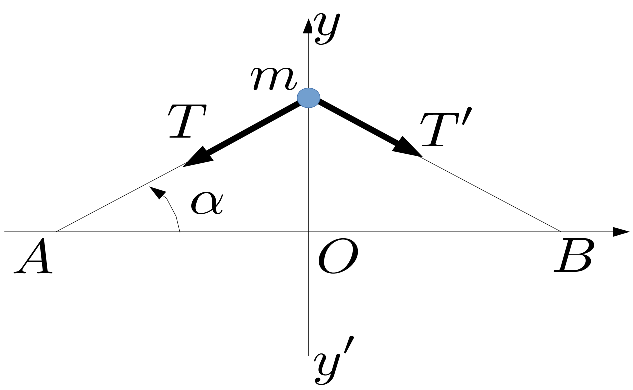
$$\begin{cases} V_1 &= -L(C+C_c)\frac{d^2V_1}{dt^2} + LC_c\frac{d^2V_2}{dt^2} \\ \\ V_2 &= LC_c\frac{d^2V_1}{dt^2} - L(C+C_c)\frac{d^2V_2}{dt^2} \end{cases}$$

4. Un mode propre du système correspond à une solution dans laquelle tous les oscillateurs vibrent avec une même pulsation. On recherche donc des solutions au système d'équations différentielles précédent sous la forme : $V_1 = V_{10}\cos(\omega t)$ et $V_2 = V_{20}\cos(\omega t)$.

Combien de modes propres peut-on isoler sur un tel système ? Caractériser ces modes propres en calculant les pulsations propres associées ainsi que les rapports des amplitudes des tensions V_1/V_2.

Problème : corde vibrante dans une cavité métallique

1. On considère une masse *m*, reliée par deux fils identiques sans masse et sans raideur à deux points fixes *A* et *B (OA = OB = a)*

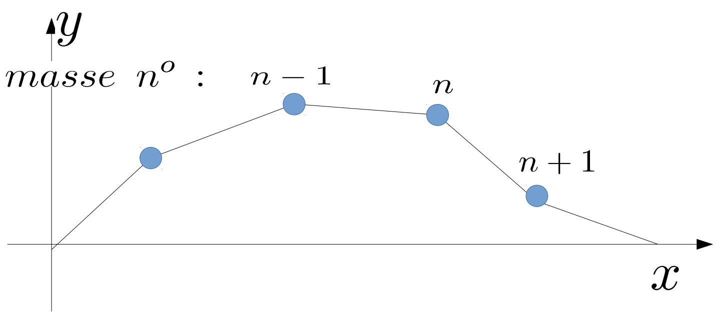


Les fils exercent des forces de tension sur la masse dont la direction reste tangente aux cordes. On écarte la masse d'une ordonnée y perpendiculairement à l'axe portant *AB*.

On néglige la pesanteur. Montrer que les deux tensions ont la même norme.

En supposant que l'angle d'inclinaison α de chacun des fils par rapport à l'axe portant *AB* est faible, montrer que les deux tensions ont la même norme et établir l'équation différentielle en *y*.

2. On considère une suite infinie de masses *m*, distantes les unes des autres d'une même distance *a*, et couplées par un fil sans masse et sans raideur. Chaque fil, de longueur *a*, exerce une tension de même norme *T* constante à ses deux extrémités. On néglige les forces de pesanteur devant les forces exercées par les fils sur les masses. On étudie dans cette question des mouvements strictement transversaux. On note y_n l'ordonnée du déplacement de la masselotte *n*.



2.1- Écrire pour la n[ième] masse, l'équation différentielle du mouvement reliant $\frac{d^2y_n}{dt^2}$ aux ordonnées y_{n-1}, y_n et y_{n+1}.

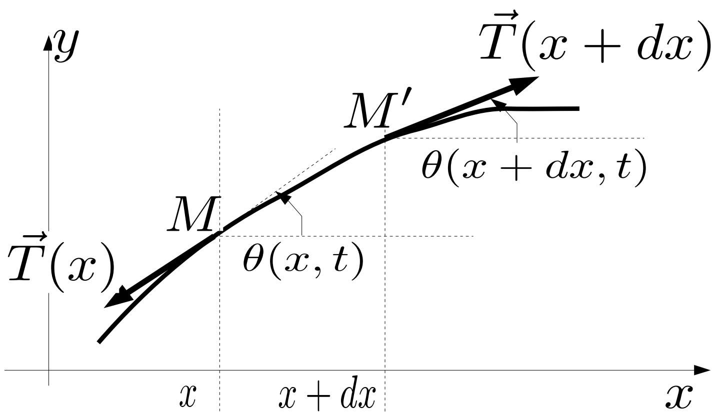
2.2- Vérifier alors qu'on peut écrire une solution de la forme :

$$y_n = A' \exp i(\omega' t - \beta' na) + B' \exp i(\omega' t + \beta' na),$$

à condition que la pulsation temporelle ω' et la pulsation spatiale β' soient reliées par une relation que l'on explicitera (relation de dispersion).

2.3- Tracer la courbe représentant les variations de ω' en fonction de β'. En déduire que, dans cette chaîne de ressorts, les ondes ne peuvent se propager qu'à des pulsations temporelles inférieures à une pulsation de coupure ω_c que l'on fera apparaître sur la courbe et dont on précisera l'expression.

3. Une corde de guitare est un fil quasiment inextensible, de longueur *L*, masse linéique μ. La corde est légèrement écartée de sa position d'équilibre horizontale initiale. Soit *MM'* un élément de corde, de longueur *dl* soumis aux forces de tension à droite et à gauche, tangentes à la corde. On supposera que ces forces n'évoluent pas à priori au cours du temps.



Le mouvement de la corde étant supposé strictement transversal, on note $y(x,t)$ l'ordonnée de l'élément de corde d'abscisse *x*. On négligera le poids de la corde devant les tensions. Dans la suite on s'intéresse aux développements relatifs aux mouvements de faible amplitude, soit $\theta \sim \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$.

3.1- Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'élément de corde *MM'*. En déduire les projections sur les axes Ox et Oy.

3.2- Montrer qu'à l'ordre d'approximation envisagé, la norme de la tension ne dépend pas de la coordonnée *x*.

3.3- Établir l'équation reliant les dérivées partielles d'ordre deux de $y(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

C'est l'équation de d'Alembert de propagation d'une onde mécanique sur une corde tendue.

3.4- Définir et exprimer c, la vitesse de propagation de la perturbation le long de la corde en fonction de la masse linéique de cette dernière et de la tension T. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue par analyse dimensionnelle. Donner l'ordre de grandeur de c pour :

- une corde de guitare : masse linéique μ = 3 g.m^{-1}, tension $T = 103$ N ;
- une corde de piano : masse volumique ρ = 7800 kg.m^{-3}, tension $T = 850$ N, diamètre $d = 1,2$ mm.

4. Justifier que l'on peut passer de la modélisation discrète (question 2.) à la modélisation continue (question 3.) en procédant à une approximation de milieu continu, qui consiste à associer une fonction $y(x,t)$ variant peu à l'échelle de a et telle que $y_n(t) = y(x = na, t)$.
On pourra expliciter par exemple les développements de Taylor à l'ordre 2 des quantités $y_{n+1}(t) - y_n(t)$ et $y_{n-1}(t) - y_n(t)$ pour les besoins de la démonstration. Quelles sont les relations entre les différents paramètres (masse, tension etc) des deux modélisations ?

5. La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

5.1- Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation de propagation s'écrivent : $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \psi)$.

5.2- Quelle relation sur les fréquences imposent les conditions aux limites précédentes ? Chacune de ces fréquences correspond à un mode propre. Proposer une définition d'un mode propre.

5.3- Dessiner l'allure de la corde pour les trois premiers modes propres à différents instants.

6. On admet que la solution générale de l'équation de propagation correspondant aux conditions aux limites précédentes est une superposition des modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Les conditions initiales sont données par la forme et la vitesse de la corde, deux fonctions définies sur $[0,L]$:

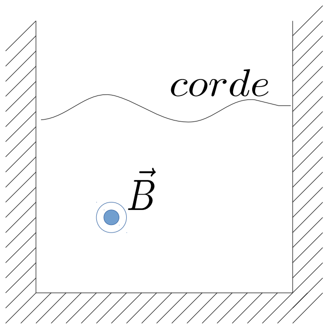
- $y(x,0) = \alpha(x)$,
- $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x)$.

6.1- Justifier que les coefficients a_n et $(\dfrac{n\pi c}{L})b_n$ correspondent à la décomposition en série de Fourier des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaires, périodiques de période $2L$, coïncidant avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$.

6.2- On donne à la corde la forme initiale $\alpha(x) = \alpha_0 \sin^3(\pi x/L)$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. Déterminer la suite des coefficients a_n et b_n dans ce cas particulier.

6.3- Quelle est la solution générale $y(x, t)$ correspondant à cette situation particulière ?

7. On suppose que la corde est métallique, sans élasticité, et fixée à ses extrémités. Les deux murs de fixation ainsi que le sol sont supposés conducteurs, l'ensemble formant ainsi un circuit fermé.



7.1- On lâche la corde dans un mode propre particulier. Décrire qualitativement les modifications éventuelles aux oscillations libres décrites jusqu'ici.

7.2- Pour analyser le phénomène précédent, on se replace dans le modèle des masses reliées les unes aux autres par une corde (question 2.) et on modélise le phénomène par une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de déplacement vertical de chaque masse : $\vec{F}_{\text{frottement}} = -hm\dfrac{dy_n}{dt}\vec{e}_y$ où $\vec{e}_y$ est le vecteur unitaire de l'axe vertical.

En appliquant l'approximation des milieux continus de la question 4. justifier que la nouvelle équation de propagation s'écrive :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{h}{c^2}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

7.3- Pour résoudre l'équation précédente on associe à $y(x, t)$ la fonction complexe $\underline{y}(x, t)$ telle que $y(x, t) = \mathbb{R}(\underline{y}(x, t))$ est égale à la partie réelle de $\underline{y}(x, t)$. On cherche $\underline{y}(x, t)$ sous la forme : $\underline{y}(x, t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$.
Montrer alors que : $\underline{f}(x) = \underline{A}e^{i\underline{k}x} + \underline{B}e^{-i\underline{k}x}$ où $\underline{A}$, $\underline{B}$ et $\underline{k}$ sont des constantes complexes.
Exprimer $\underline{k}^2$ en fonction de ω, h, et c.

7.4- On pose $\underline{k} = k_1 + ik_2$, montrer que l'on a alors :

$$\begin{cases} k_1^2 - k_2^2 & = \omega^2/c^2 \\ 2k_1k_2 & = -h\omega/c^2 \end{cases}$$

7.5- En supposant que $\underline{A}$ est réel et $\underline{B}$ nul, montrer que l'on peut écrire la solution sous la forme :

$$y(x,t) = Ae^{-k_2 x}\cos(\omega t + k_1 x)$$

Tracer l'allure de la fonction et interpréter la diminution progressive de l'amplitude du signal.