CONCOURS D'ADMISSION 2018

**FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE** **Session de printemps**

**Seconde voie pour les élèves étrangers francophones issus de cycles préparatoires des formations françaises à l'étranger**

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures)

*L'épreuve se compose de trois parties indépendantes, numérotées I, II et III.*
*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

⋆⋆⋆

## I

**Question I.1.** Déterminer toutes les fonctions dérivables $y$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfont l'équation différentielle

$$y' + y = 0.$$

**Question I.2.** Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère deux solutions distinctes $y_1$ et $y_2$ de l'équation différentielle

$$y' + y = f. \tag{1}$$

La fonction $y_1 - y_2$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$ ?

**Question I.3.** Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle (1) considérée dans la question précédente admet au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de cette partie, on ne s'intéressera qu'au cas où la fonction $f$ est la fonction qui associe à tout réel $x$ la quantité $f(x) = 1/(1 + e^x)$.

**Question I.4.** Déterminer toutes les fonctions dérivables $y$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfont l'équation différentielle
$$y' + y = \frac{1}{1+e^x}.$$

**Question I.5.** Déterminer la fonction dérivable $y_0$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation différentielle de la question I.4 et est telle que $y_0(0) = \ln(2)$.

**Question I.6.** Montrer que pour tout réel $u$ positif ou nul, on a $0 \leq \ln(1+u) \leq u$.

**Question I.7.** Déduire de ce qui précède que la fonction $y_0$ définie dans la question I.5 est bornée sur $\mathbb{R}$.

**Question I.8.** Les limites de $y_0(x)$, quand $x$ tend vers $-\infty$, et vers $+\infty$, existent-elles ? Dans l'affirmative, on donnera leurs valeurs.

## II

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$. On rappelle qu'on appelle endomorphisme de $E$ une application linéaire de $E$ dans $E$ ; on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$. Conformément à l'usage, pour une famille $x_1, \ldots, x_k$ d'éléments de $E$, on note $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ ; pour deux endomorphismes $f$ et $g$ de $E$, on note $f \circ g$ l'endomorphisme de $E$ qui à tout $x$ de $E$ associe $f(g(x))$.

On s'intéresse ici à $\mathcal{C}(E)$, l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec tous les endomorphismes de $E$, c'est-à-dire que l'on a
$$\mathcal{C}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall g \in \mathcal{L}(E) \colon f \circ g = g \circ f\}.$$

Dans toute cette partie, on considère un élément $f$ de $\mathcal{C}(E)$ et un vecteur $x$ non nul de $E$.

**Question II.1.** Justifier que l'on peut trouver $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, vecteurs de $E$, tels que la famille $\mathcal{B} = \{x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$ est une base de $E$.

**Question II.2.** Montrer qu'il existe un endomorphisme $p$ de $E$ tel que $p(x) = x$ et tel que pour tout $z$ de $E$ on a $p(z) \in \mathrm{Vect}(x)$.

**Question II.3.** En déduire que l'on a $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$.

**Question II.4.** On considère la base $\mathcal{B}$ introduite dans question II.1. Montrer que pour tout $i$ dans $\{1, 2, \cdots, n-1\}$, on peut trouver $g_i$ dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $g_i(x) = y_i$ et $g_i(y_i) = x$.

**Question II.5.** Déduire de ce qui précède que $f$ est une homothétie de $E$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel $k$ tel que pour tout $z$ de $E$, on a $f(z) = kz$.

**Question II.6.** Quel est l'ensemble $\mathcal{C}(E)$ ?

## III

Dans toute cette question, les symboles $n$ et $k$ dénotent des entiers positifs ou nuls. On rappelle que les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (parfois notés $C_n^k$) sont des entiers positifs définis pour tous les couples d'entiers $n$ et $k$ avec $0 \leq k \leq n$ et qu'ils satisfont la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}\colon \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n.$$

### III. A

On étudie ici quelques propriétés de sommes faisant intervenir les coefficients binomiaux. Dans la partie III.B, on n'utilisera de cette partie III.A que les définitions (5) et les relations (2) et (6).

**Question III.1.** Montrer qu'il existe un entier $a_n$ que l'on précisera, tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sum_{0 \leq k \leq n} k \binom{n}{k} t^k = a_n t (1+t)^{n-1}.$$

**Question III.2.** Montrer que pour tout réel $x$ et tout entier positif $n$, il existe un entier $b_n$ que l'on précisera tel que

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \qquad (2)$$

$$\sum_{0 \leq k \leq n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = b_n x. \qquad (3)$$

De manière similaire, on peut démontrer (on ne demande pas de le faire ici : on en donnera une autre démonstration dans la partie III.C) que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} : \sum_{0 \leq k \leq n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x); \qquad (4)$$

Pour $n$ entier strictement positif et $x$ dans $[0,1]$ on introduit les ensembles d'entiers

$$S_n(x) = \{k \in [0,n] : \mid k - nx \mid < n^{2/3}\} \text{ et } T_n(x) = \{k \in [0,n] : \mid k - nx \mid \geq n^{2/3}\}. \qquad (5)$$

**Question III.3.** Montrer que pour $k$ dans $T_n(x)$, on a $1 \leq (k - nx)^2/n^{4/3}$. En utilisant la relation (4), montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1] : \sum_{k \in T_n(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{nx(1-x)}{n^{4/3}} \leq \frac{1}{4n^{1/3}}. \qquad (6)$$

## III. B

On considère une fonction $f$ dérivable à dérivée continue, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

**Question III.4.** Montrer qu'il existe deux nombres réels $M_0$ et $M_1$ tels que l'on a

$$\forall x \in [0,1], \forall y \in [0,1] : \mid f(x) \mid \leq M_0 \text{ et } \mid f(x) - f(y) \mid \leq M_1 \mid x - y \mid .$$

Pour $n$ entier positif et $x$ dans $[0,1]$, on pose

$$Q_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

**Question III.5.** Montrer que pour $n$ entier strictement positif et $x$ dans $0,1]$, on a

$$\mid Q_n(x) - f(x) \mid = \left| \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left( f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right|.$$

**Question III.6.** Montrer que pour $n$ entier strictement positif et $x$ dans $[0,1]$ on a

$$\left| \sum_{k \in S_n(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left( f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \leq \frac{M_1}{n^{1/3}}.$$

**Question III.7.** Montrer que pour $n$ entier strictement positif et $x \in [0,1]$ on a

$$\left| \sum_{k \in T_n(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left( f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \leq \frac{M_0}{2n^{1/3}}.$$

**Question III.8.** Montrer que pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, il existe un polynôme $Q$ à coefficients réels tel que

$$\forall x \in [0,1] : |Q(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

## III. C

Dans cette partie, $n$ désigne un entier strictement positif et $p$ un réel de l'intervalle $[0,1]$. On rappelle qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ si on a $\text{Prob}(X = 1) = p$ et $\text{Prob}(X = 0) = 1 - p$ et qu'une variable aléatoire $Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n$ et $p$ si pour tout entier $k$ avec $0 \leq k \leq n$, on a $\text{Prob}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On rappelle enfin que la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre $p$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

**Question III.9.** Soit $Y$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Donner une interprétation des relations (3), (4) et (6) en terme d'une telle variable aléatoire $Y$. Donner une démonstration de l'égalité (4).